MAT 2080 MÉTHODES STATISTIQUES — Trimestre: Été 2003

PREMIER EXAMEN

Samedi le 31 mai, 9h00 à 12h00

Nom	
Prénom	
Code permanent	
Groupe	

S.v.p. encercler le nom de votre enseignant(e): **M.-C. Audet (20, 21)** **R. Brousseau (10)** **R. Labonté (30)**

INDICATIONS

- Répondre directement sur ce questionnaire.
- Vérifier que ce document comporte 8 pages (il y a 7 problèmes). Il doit être remis en entier. Formulaire et tables sont à part et n'ont pas à être retournés.
- Inscrire lisiblement votre nom au haut de chacune des pages 2 à 8.
- Les solutions doivent être rédigées dans les espaces encadrés. Expliquer *clairement* votre démarche et donner les *détails* de vos calculs. Si l'espace s'avère insuffisant, indiquer que la solution se poursuit au verso de la page.
- AUCUNE documentation n'est autorisée. ***Plagiat*** $\Rightarrow$ ***sanctions sévères.***
- Pour fins de calculs-brouillon, vous pouvez utiliser les versos du formulaire.
- L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.
- Il faut présenter sa carte d'étudiante, d'étudiant (avec photo) à la remise de son examen et signer la feuille de présence.

À l'usage de la correctrice, du correcteur

1.	____ / *16*	2.	____ / *10*	3.	____ / *12*	4.	____ / *24*
5.	____ / *18*	6.	____ / *8*	7.	____ / *12*		

TOTAL: ____ / *100*

Nom: ……………………………………………………………………

Problème 1 *(16 points sur 100)*

Dans la population constituée d'un lot de 950 tuiles de céramique, on a relevé sur chacune le nombre Y de taches indésirables. Voici la distribution des observations:

Nombre de taches (Y)	0	1	2	3	4	*Total*
Fréquence	0,04	0,06	0,28	0,48	0,14	1

Déterminer la *moyenne arithmétique* de *Y*.

$\overline{y} = 0(0,04) + 1(0,06) + 2(0,28) + 3(0,48) + 4(0,14) = 2,62$

Réponse: **2,62**

Déterminer l'*écart type* de *Y*.

$\sigma^2 = (0-2,62)^2(0,04) + (1-2,62)^2(0,06) + (2-2,62)^2(0,28) + (3-2,62)^2(0,48) + (4-2,62)^2(0,14) = 0,8756$

$\sigma = \sqrt{0,8756} = 0,93573501$

Réponse: **0,93573501**

Déterminer la *proportion* de tuiles qui comportent 3 taches *ou moins*.

$0,04 + 0,06 + 0,28 + 0,48 = 0,86$

Réponse: **0,86**

Déterminer la *médiane* de *Y*.

Réponse: **3**

Nom: ……………………………………………………………………

Problème 2 *(10 points sur 100)*

Le promoteur A a construit et vendu 200 condominiums dans le quartier Rosegorge. Le promoteur B a construit et vendu 100 condominiums dans le quartier Mile-West.

Prix de vente moyen par unité chez A: 121 000 $
Prix de vente moyen par unité chez B: 93 000 $

Trouver le prix de vente moyen pour l'ensemble des 300 condominiums.

$$\frac{200(121000)+100(93000)}{200+100}=\frac{33500000}{300}=111667$$

Réponse: **111 667**

On se demande pourquoi il y a une si grande différence entre les moyennes respectives des prix de vente chez A et B. On a établi les relations suivantes entre la superficie habitable (en mètres carrés) et le prix de vente:

Chez A: Prix = 40 000 + 560 superficie
Superficie moyenne des condos chez A: 110 mètres carrés

Chez B: Prix = 50 000 + 470 superficie
Superficie moyenne des condos chez B: 90 mètres carrés

Ajuster les prix de ventes moyens des promoteurs A et B en fonction des informations précédentes.

Superficie considérée pour fins d'ajustement: $\frac{200(110)+100(90)}{300}=103,3333\text{ m}^2$

Moyenne ajustée (A): 40000 + 560(103,3333) = 97 867 $

Moyenne ajustée (B): 50 000 + 470(103,3333) = 98 567 $

Conclusion: Les superficies des condominiums à Rosegorge sont supérieures à celles de Mile-West. Si les superficies moyennes avaient été les mêmes (soit 103,3333 m^2) dans les deux quartiers, le prix moyen des maisons à Rosegorge aurait en été inférieur à celui de Mile-End de 700 $

Nom: ………………………………………………………………………

Problème 3 *(12 points sur 100)*

Un examen de comptabilité a été administré à un grand nombre d'étudiants récemment diplômés universitaires. On considère que les résultats sont distribués approximativement selon une loi normale de moyenne 65 et d'écart type 13.

Si la note de passage est égale à 50, quel est (en pourcentage) le taux d'échec ?

Si X est la note d'un étudiant, alors $X \sim \mathfrak{N}(65\ ;\ 169)$ et le taux d'échec est alors $P(X < 50) = P(Z < -1{,}15) = 0{,}1251$.

Réponse: **12,51 %**

Pour se voir attribuer un A+ , un étudiant doit se classer parmi les 5% ayant obtenu les meilleures notes. Quel est le résultat à l'examen à partir duquel on décerne un A+ ?

Si C est la note à partir de laquelle on décerne un A+, alors C doit satisfaire $P(X \geq C) = 0{,}05 \Rightarrow$

$$P\left(Z \geq \frac{C-65}{13}\right) = 0{,}05 \Rightarrow \frac{C-65}{13} = 1{,}645 \Rightarrow C = 86{,}385$$

Réponse: **86 ou 87**

Nom: ……………………………………………………………………

Problème 4 *(24 points sur 100)*

Dans chacun des contextes qui suivent, une variable aléatoire est définie. Déterminer le type de distribution de la variable (i.e. sa loi de probabilité) AVEC LES PARAMÈTRES APPROPRIÉS.

EXEMPLE DE RÉPONSE ATTENDUE:

On lance un dé équilibré à 25 reprises.

X_0 = nombre de fois que la face "3" apparaît. $X_0 \sim B\left(25\ ,\ \frac{1}{6}\right)$

Une caisse contient 200 oranges dont 10% sont avariées. On remplit un sac avec 12 oranges choisies aléatoirement dans la caisse.

X_1 = nombre d'oranges avariées dans le sac. $X_1 \sim \mathfrak{H}(12;20;180)$

Dans un hôpital, il survient en moyenne 10 naissances par jour (24 heures).

X_2 = nombre de filles parmi les dix prochaines naissances. $X_2 \sim \mathfrak{B}(10\ ;\ \frac{1}{2})$

Dans un hôpital, il survient en moyenne 10 naissances par jour (24 heures).

X_3 = nombre de naissances entre 17h00 et 17h20. $X_3 \sim \mathfrak{P}(0{,}1389)$

Dans un hôpital, il survient en moyenne 10 naissances par jour (24 heures).

X_4 = nombre d'heures entre 12h00 et 18h00 au cours desquelles au moins une naissance survient. $X_4 \sim \mathfrak{B}(6;1-e^{-10/24})$

Il s'avère que 5% des pièces issues d'une chaîne de montage sont défectueuses.

X_5 = nombre de pièces à vérifier afin d'en trouver une première défectueuse. $X_5 \sim \mathfrak{G}(0{,}05)$

Il s'avère que 5% des pièces issues d'une chaîne de montage sont défectueuses.

X_6 = nombre de pièces défectueuses dans une caisse contenant 24 pièces. $X_6 \sim \mathfrak{B}(24\ ;\ 0{,}05)$

Nom: ……………………………………………………………………

Problème 5

(18 points sur 100)

Considérer le jeu suivant: un joueur paie 10 dollars US pour tenter de deviner le résultat du lancer d'un dé (à six faces, équilibré). Si le joueur devine correctement, on lui remet sa mise de 10 dollars PLUS K dollars. Sinon, le joueur a perdu sa mise.

Pour quelles valeurs de K le joueur est-il avantagé EN MOYENNE ?

Le gain moyen du joueur est $\mathrm{E}(X) = (-10)\frac{5}{6} + K\frac{1}{6}$

$\mathrm{E}(X) > 0 \Leftrightarrow K > 50$

Réponse: **> 50 $**

Poser maintenant K = 40 dollars.

Trouver l'espérance et l'écart type du ***gain net*** X du joueur qui joue à une reprise (mise de 10 dollars).

Distribution de la variable X: X prend la valeur -10 avec probabilité 5/6 et 40 avec probabilité 1/6

Espérance de X: (-10)(5/6) + 40(1/6) = -1,6667

Écart type de X: $\sigma = \sqrt{(-10+1,6667)^2\frac{5}{6} + (40+1,6667)^2\frac{1}{6}} = \sqrt{347,2222}$ = 18,6339

Nom: ……………………………………………………………………

Toujours avec K = 40 dollars, trouver l'espérance et l'écart type du ***gain net*** du joueur qui joue à dix reprises (mise de 10 dollars à chaque fois). Justifier *clairement* votre raisonnement.

Espérance: Le gain net au cours des 10 reprises est une somme de 10 variables aléatoires indépendantes, chacune de moyenne -1,6667 et de variance 347,2222. Donc $E(X) = 10(-1{,}6667) = -16{,}667$

Écart type: Les variables étant indépendante, la variance de leur somme est égale à la somme de leurs variances, soit = 10(347,2222) et l'écart-type est $\sqrt{10(347{,}2222)}$ = 58,92557

Problème 6 *(8 points sur 100)*

Dans le contexte du problème précédent, un joueur a deviné le résultat du lancer du dé correctement 31 fois en 100 tentatives. Celui qui exploite le jeu devrait-il se demander si le joueur n'a pas triché ?
(Suggestion: supposer que le joueur est honnête et utiliser la cote Z.)

Variable aléatoire et sa distribution: Y = le nombre de fois que le joueur a bien deviné. $X \sim \mathfrak{B}(100\ ;\ p)$. Si le joueur n'a pas triché, $p = 1/6$

Cote Z: Si le joueur n'a pas triché, $E(X) = 100(1/6) = 16{,}6667$ et $\sigma_X = \sqrt{100\frac{1}{6}\frac{5}{6}} = 3{,}7268$. La cote Z serait donc $(31-16{,}6667)/3{,}7268 = 3{,}84$

Conclusion: Une cote Z de 3,84 est extrêmement improbable sous la supposition que le joueur n'a pas triché. Nous concluons qu'il a vraisemblablement triché.

Nom: ....

Problème 7 *(12 points sur 100)*

Pour chacune des questions suivantes, indiquer (numériquement) le choix de réponse approprié parmi

1. Vrai ***2.*** Faux ***3.*** On ne peut pas répondre par vrai ou faux

On tire à pile ou face 20 fois. Le nombre de fois que 'pile' apparaît et le nombre de fois que 'face' apparaît sont deux variables indépendantes.

Réponse: **F**.

À partir de la distribution conjointe de deux variables qualitatives X et Y, on peut toujours retrouver les distributions marginales respectives des deux variables.

Réponse: **V**.

À partir des distributions marginales respectives de deux variables qualitatives X et Y, on peut toujours retrouver la distribution conjointe des deux variables.

Réponse: **F**

Si deux variables qualitatives X et Y sont dépendantes, on peut s'attendre à ce que les distributions conditionnelles de X (en fréquences) soient différentes.

Réponse: **V**.

Si $X \sim B(500\ ,\ 0.45)$, alors il convient d'approximer la distribution de X par une loi de Poisson.

Réponse: **F**.

Si $X \sim B(500\ ,\ 0.45)$, alors il convient d'approximer la distribution de X par une loi normale.

Réponse: **V**.